Odpowiedzi i schematy oceniania

Arkusz 20

Zadania zamknięte

Numer zadania	**Poprawna odpowiedź**	**Wskazówki do rozwiązania**
1.	C.	a zł – cena czekolady (batonika) przed podwyżką $105\%a$ zł – cena czekolady po podwyżce $125\%a$ zł – cena batonika po podwyżce $2(125\%a + 105\%a) = 460\%a = 4{,}6a$ – tyle trzeba zapłacić za batonik i czekoladę po podwyżce $\frac{4{,}6a - 4a}{4a} \cdot 100\% = 15\%$
2.	C.	$\lvert 2x - 5 \rvert \leq 3$ $-3 \leq 2x - 5 \leq 3$ $2 \leq 2x \leq 8$ $1 \leq x \leq 4$ Liczby naturalne należące do zbioru rozwiązań nierówności: $1, 2, 3, 4$. Są więc 4 takie liczby.
3.	B.	$f(2) - f(1) = (-4 + 4) - 1^3 = 0 - 1 = -1 < 0$
4.	C.	$g(x) = (x-2)^2 + 6 - 4 = (x-2)^2 + 2$
5.	D.	$x^2 - 6 = -3$ $x^2 - 3 = 0$ $x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{3}$ $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$ $x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{3}$
6.	C.	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ $b_1 = 3^a, q = 3$ $b_n = 3^a \cdot 3^{n-1} = 3^{n+a-1}$
7.	A.	h – wysokość trójkąta $\frac{h}{6} = tg\alpha$ $h = 6tg\alpha$

		$P=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 6tg\alpha=36tg\alpha$
8.	B.	Współrzędne środka okręgu: $(3,-2)$, promień: 4, równanie stycznej: $y=-2+4=2$.
9.	B.	E – zwycięży Emilia A – zwycięży Aldona $P(E\cup A)=P(E)+P(A)-P(E\cap A)$ $P(E\cup A)=0{,}2+0{,}1-0=0{,}3$
10.	A.	$\frac{(a^{-2}\cdot a^{5})^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{a}}=\frac{(a^{3})^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{2}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}=1$
11.	D.	$\frac{6\cdot 2+10\cdot 3+4\cdot 4}{6+10+4}=\frac{58}{20}$
12.	A.	Objętość wylanej wody jest równa objętości kuli. $V=\frac{4}{3}\pi r^{3}=\frac{4}{3}\pi\cdot 3^{3}=36\pi$
13.	B.	h – wysokość ostrosłupa $\frac{1}{3}\cdot 6^{2}\cdot h=96$ $h=8$ $\frac{h}{r}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$
14.	D.	$x-1>0\Rightarrow x>1$ $5-x>0\Rightarrow x<5$ Stąd: $1<x<5$. $P(x)=(x-1)(5-x)$ – wykresem jest parabola o ramionach skierowanych do dołu. Wartość największą funkcja przyjmuje w punkcie $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$, gdzie $x_1=1, x_2=5$ $(1{,}5$ – miejsca zerowe funkcji). $x_0=\frac{5+1}{2}=3$
15.	B.	$x, 2x, 2x$ – długości krawędź prostopadłościanu, $x>0$

		$\sqrt{x^2+(2x)^2+(2x)^2}=\sqrt{9x^2}=3x$ $3x=6$ $x=2$ Pole podstawy: $2\cdot 4=8$.
16.	C.	$6\cdot 5=30$
17.	D.	$a=2, b=8$ $b=400\%a$
18.	A.	Obliczamy pierwszą współrzędną punktu przecięcia prostych. $x-y-m=0$ $y=x-m$ $-2x-y+4=0$ $y=-2x+4$ $x-m=-2x+4$ $x=\frac{m+4}{3}$ Pierwsza współrzędna ma być liczbą dodatnią. $\frac{m+4}{3}>0$ $m>-4$
19.	D.	Wykresem funkcji $f(x)=-(x+5)(x-3)$ jest parabola o ramionach skierowanych ku dołowi, przecinająca oś OX w punktach $(-5,0),(3,0)$. Dodatnie wartości przyjmuje w przedziale $(-5,3)$. Liczbami całkowitymi spełniającymi daną nierówność są więc liczby: $-4,-3,-2,-1,0,1,2$. Do zbioru rozwiązań nie należy 3.
20.	C.	Mediana jest równa: $\frac{x+4+x+6}{2}=x+5$. Na podstawie treści zdania: $x+5=9 \Rightarrow x=4$. Najmniejsza liczba to 4, największa to 24. $24-4=20$

21.	A.	Pierwszą rękawiczkę można włożyć do szuflad na 4 sposoby, podobnie drugą rękawiczkę. $4 \cdot 4 = 16$
22.	B.	l – tworząca stożka $l^2 = 5^2 + 12^2$ $l = 13$ Pole powierzchni bocznej: $\pi rl = \pi \cdot 12 \cdot 13 = 156\pi$.
23.	A.	$\log_5 a = 2 \Rightarrow a = 25$ $\log_4 b = 2 \Rightarrow b = 16$ $\log_8 c = 1 \Rightarrow c = 8$ $\sqrt{a + b + c} = \sqrt{25+16+8} = \sqrt{49} = 7$
24.	C.	(x, y) – współrzędne punktu leżącego na symetralnej $\sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$ $x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$ $5x - 3y + 10 = 0$ Dla $x = 0$ $0 - 3y + 10 = 0$ $y = \frac{10}{3}$
25.	B.	a – długość krawędzi kostki $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ $a^3 \cdot 9 = 8 \cdot 9 = 72$ (g)

Zadania otwarte

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania	Liczba punktów
26.	Zapisanie zależności między wysokością drzewa, a jego cieniem: α – miara kąta, pod jakim promienie słoneczne padają do poziomu,	1

	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{10\sqrt{3}}$.	
	Podanie miary kąta: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.	1
27.	Obliczenie a – pierwszego wyrazu ciągu i różnicy r : $a_3 = 4,$ $a + 2r = 4,$ $a = 4 - 2r,$ $a + a + r + a + 2r + a + 3r = 14,$ $2a + 3r = 7,$ $2(4 - 2r) + 3r = 7,$ $r = 1,$ $a = 4 - 2 = 2.$	1
	Obliczenie a_{10} : $a_{10} = 2 + 9 = 11$.	1
28.	Przekształcenie równania i obliczenie $\sin x$: $(\cos x + \sin x)^2 - 2\sin x \cos x = 2\sin x$, $\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\sin x \cos x = 2\sin x$, $1 = 2\sin x,$ $\sin x = \frac{1}{2}.$	1
	Określenie miary kąta: $x = 30^\circ$.	1
29.	Zapisanie odpowiedniego układu równań: x m – długość pociągu, v m/s – prędkość pociągu, $\begin{cases} x = 5v \\ 300 + x = 25v \end{cases}$.	1
	Obliczenie prędkości: $300 + 5v = 25v,$ $300 = 20v,$ $v = 15$ m/s.	1

	Obliczenie długości pociągu: $x = 5 \cdot 15 = 75$ (m).	1
	Obliczenie, jak długo pociąg osobowy będzie mijał pociąg towarowy: $\frac{75+150}{15} = \frac{225}{15} = 15$ (s).	1
30.	Zapisanie równania w postaci iloczynowej: $(\mathrm{tg}\alpha - \sqrt{3})(\mathrm{tg}\alpha + \sqrt{3}) = 0$.	1
	Podanie rozwiązania równania: $\alpha = 60^\circ$.	1
	Obliczenie: $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}9$, $\cos 60^\circ = 0{,}5$.	1
	Porównanie liczb: $0{,}9 > 0{,}5 \Rightarrow \sin\alpha > \cos\alpha$.	1
31.	Zauważenie, że wartości krosna w poszczególnych latach stanowią kolejne wyrazy malejącego ciągu arytmetycznego.	1
	Określenie pierwszego i ostatniego wyrazu ciągu: w – początkowa wartość krosna, r – kwota, o jaką rocznie maleje wartość krosna, $a_1 = w - r$, $a_n = 0$.	1
	Zapisanie odpowiedniego układu równań: $\begin{cases} w - nr = 0 \\ 4a_{20} = a_2 \end{cases}$, $\begin{cases} w - nr = 0 \\ 4(w - 20r) = w - 2r \end{cases}$.	1
	Przekształcenie układu równań: $\begin{cases} w - nr = 0 \\ 3w = 78r \end{cases}$, $\begin{cases} w - nr = 0 \\ w = 26r \end{cases}$, $\begin{cases} 26r - nr = 0 \\ w = 26r \end{cases}$.	1
	Zauważenie, że $r \neq 0$ i obliczenie n:	1

	$26r - nr = 0 / : r$, $n = 26$.	
32.	Określenie liczby zdarzeń elementarnych w przypadku siadania przy stole: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.	1
	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych w przypadku siadania na ławie: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.	1
	Liczba zdarzeń sprzyjających w przypadku siadania na ławie: $2 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 240$.	1
	Liczba zdarzeń sprzyjających w przypadku siadania przy stole: $2 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 48$.	1
	Obliczenie i porównanie prawdopodobieństw: $P(S) = \frac{48}{120} = 0{,}4$, $P(Ł) = \frac{240}{720} \approx 0{,}3$, $P(S) > P(Ł)$.	2