Odpowiedzi i schematy oceniania

Arkusz 21

Zadania zamknięte

Numer zadania	**Poprawna odpowiedź**	**Wskazówki do rozwiązania**
1.	C.	$W(x)=(x-2)(x+1)(x+2)+x=(x^2-4)(x+1)+x=x^3+x^2-3x-4$ $P(x)=(a+b)x^3+x^2+(a-b)x-4$ Wielomiany równe mają równe współczynniki przy odpowiednich zmiennych. $+\begin{cases}a+b=1\\ a-b=-3\end{cases}$ $2a=-2$ $a=-1$ $b=2$
2.	A.	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ Z własności ciągu geometrycznego wynika, że: $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha,$ $\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{tg}\alpha,$ $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},$ $\alpha=30^0.$
3.	C.	$x^3\log_3 9-x=0$ $2x^3-x=0$ $x(2x^2-1)=0$ $x(x\sqrt{2}-1)(x\sqrt{2}+1)=0$ $x=0$ lub $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ lub $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

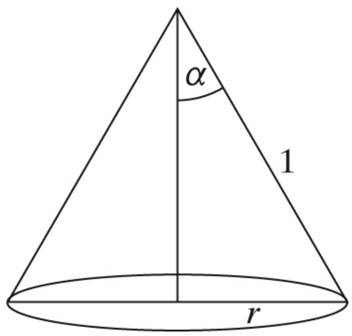
		Są dwa pierwiastki niewymierne: $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
4.	C.	$\begin{cases} 4x+5y=2 \\ 8x+10y=p \end{cases}$ dla $p=3$ układ ma postać: $\begin{cases} 4x+5y=2 \\ 8x+10y=3/:2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x+5y=2 \\ 4x+5y=1{,}5 \end{cases}$ Lewe strony obu równań są równe, prawe nie są równe. Układ równań nie ma rozwiązania.
5.	A.	n – liczba zawodników $\frac{n(n-1)}{2}=36$ $n^2-n-72=0$ $\Delta=1+288=289$ $n_1=-8$, $n_2=9$ $n=9$, bo $n>0$
6.	C.	Na miejscu dziesiątek tysięcy musi stać cyfra 5. $2\cdot2\cdot2\cdot2=16$
7.	D.	Odwrotność liczby $\frac{\sqrt{7}-1}{6}$ to: $\frac{6}{\sqrt{7}-1}=\frac{6(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}=\frac{6(\sqrt{7}+1)}{6}=\sqrt{7}+1$.
8.	B.	$\frac{n+1}{n-1}=\frac{n-1+2}{n-1}=\frac{n-1}{n-1}+\frac{2}{n-1}=1+\frac{2}{n-1}$ Liczba $\frac{2}{n-1}$ jest liczbą naturalną, gdy $n=2$ lub $n=3$. $\frac{6}{2}=3$ – liczba naturalna $\frac{6}{3}=2$ – liczba naturalna
9.	D.	Pierwiastkami wielomianu są liczby: $1, 2, 3, ..., 99, 100$. Liczby te są

		kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, którego pierwszy wyraz jest równy 1, ostatni 100, a różnica jest równa 1. Należy obliczyć sumę 100 początkowych wyrazów tego ciągu: $S_{100} = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050$.
10.	C.	Prosta $y = x$ przechodzi przez początek układu współrzędnych i jest osią symetrii I i III ćwiartki układu współrzędnych. Jeśli przez punkty $(0,1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0)$ przeprowadzimy równoległe do prostej $y = x$, to podzielą one odcinek AB na 10 równych części (na podstawie twierdzenia Talesa). Cztery z tych części tworzą odcinek AC, a sześć tworzy odcinek CB. Prosta $y = x$ dzieli więc odcinek AB na części pozostające w stosunku $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
11.	B.	Środek przedziału $\langle -4, 2\rangle$ znajduje się w odległości 3 od każdego z końców przedziału i w odległości 1 od 0. Na rysunku przedstawiony jest przedział obustronnie otwarty $(-4, 2)$. Zatem nierówność, której zbiorem rozwiązań jest dany przedział, jest nieostra. $\lvert x+1\rvert < 3$ $-3 < x+1 < 3$ $-4 < x < 2$
12.	A.	$a_n = \frac{3n-1}{2n+4}$ $a_5 = \frac{3\cdot 5-1}{2\cdot 5+4} = \frac{14}{14} = 1$
13.	D.	$\pi r^2 h = 785$ $3{,}14 \cdot 5^2 \cdot h \approx 785$ $78{,}5h \approx 785$ $h \approx 10$ $h \approx 10$ (cm)

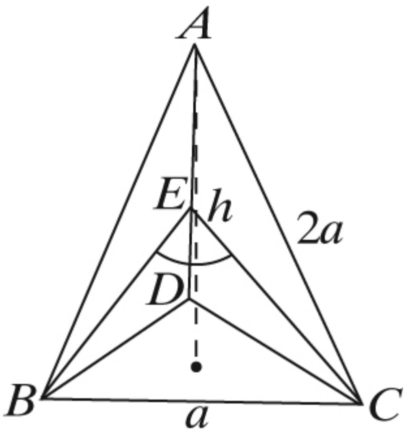
14.	A.	$\frac{h}{9-6} = \mathrm{tg}60^\circ$ $\frac{h}{3} = \sqrt{3}$ $h = 3\sqrt{3}$
15.	D.	$\frac{5\cdot(-1)+m\cdot 2+2\cdot 3}{7+m} = 0{,}7$ $1+2m = 4{,}9+0{,}7m$ $2m-0{,}7m = 4{,}9-1$ $1{,}3m = 3{,}9$ $m = 3$
16.	B.	$2-\frac{1}{4}n > 0$ $8-n > 0$ $n < 8$ Liczba n jest liczbą naturalną, większą od zera. Zatem $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ lub 7. Jest więc 7 wyrazów spełniających warunki zadania.
17.	C.	$\mathrm{tg}60^\circ = \sqrt{3}$ y=$\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ – równanie prostej Jeśli $x=-1$, to $y = -\sqrt{3}+2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.
18.	D.	$\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}^{\sqrt[3]{64}}} = \left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}^{4}} = \left(\sqrt{3}\right)^{9} = 81\sqrt{3}$
19.	B.	Liczba możliwości utworzenia kodów czterocyfrowych: 10^4. Jeśli prawdopodobieństwo odkrycia kodu ma się zmniejszyć stukrotnie, to liczba możliwości powinna być równa $10^4 \cdot 100 = 10^6$. Należy dołożyć dwie cyfry do kodu.
20.	C.	Cyfrą jedności liczby 2015^{2015} jest 5, gdyż cyfrą jedności liczby 2015 jest 5. Jeżeli wykładnik potęgi liczby 5 jest liczbą naturalną, większą od 0, to cyfrą jedności tej potęgi jest 5.

Zadania otwarte

Numer	**Modelowe etapy rozwiązania**	**Liczba**

zadania		punktów
21.	Określenie współrzędnych środków okręgów: $A=(-1,4),\ B=(-1,-1),\ C=(2,-1)$.	1
	Zauważenie, że trójkąt ABC jest prostokątny i jego przyprostokątne mają długości 3 i 5, oraz obliczenie pola P trójkąta: $P=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5=7{,}5$.	1
22.	Zapisanie licznika ułamka w innej postaci: $\frac{997\cdot 998+2}{997^2+999}=\frac{997(997+1)+2}{997^2+999}=\frac{997^2+997+2}{997^2+999}$.	1
	Zapisanie licznika w postaci sumy dwóch wyrazów i wykonanie skrócenia ułamka: $\frac{997^2+997+2}{997^2+999}=\frac{997^2+999}{997^2+999}=1$.	1
23.	 Wyznaczenie promienia stożka: $2\pi r=\pi l$, $r=\frac{\pi l}{2\pi}=\frac{l}{2}$.	1
	Obliczenie miary kąta rozwarcia stożka: $\sin\alpha=\frac{r}{l}=\frac{\frac{l}{2}}{l}=\frac{1}{2},\ \alpha=30^\circ$, $2\alpha=60^\circ$.	1

24.	Obliczenie oprocentowania kwartalnego i zastosowanie wzoru na procent składany: $8\% \cdot \frac{1}{4} = 2\%$, $10000\left(1+\frac{2}{100}\right)^4$.	1
	Obliczenie kwoty na koniec okresu lokaty: $10000\left(1+\frac{2}{100}\right)^4 \approx 10824$ (zł).	1
25.	Obliczenie argumentu, dla którego wartość funkcji p jest największa: $p(x)=12x-\frac{2}{5}x^2=-\frac{2}{5}x^2+12x$, $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-12}{-\frac{4}{5}}=15$.	1
	Obliczenie wartości funkcji dla argumentu $x=15$ i podanie odpowiedzi: $p(15)=-\frac{2}{5}\cdot 15^2+12\cdot 15=-90+180=90$, największa wysokość, na jaką wzniosła się piłka, jest równa 90.	1
26.	Założenie, że $x \le z, b \le z$ i wykorzystanie nierówności trójkąta: $x+y>z$.	1
	Oszacowanie nierówności: $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \le \sqrt{z^2+z^2+z^2} = z\sqrt{3}$.	1
	Zauważenie, że $z\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}(z+z)$.	1
	Oszacowanie wyrażenia: $\frac{\sqrt{3}}{2}(z+z)<\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y+z)$.	1
27.	Zapisanie równania w postaci: $x-x\sqrt{3}+2y+y\sqrt{3}-3=0$.	1
	Zapisanie po jednej stronie równania liczb wymiernych, a po drugiej niewymiernych: $x+2y-3=x\sqrt{3}-y\sqrt{3}$.	1
	Zauważenie, że liczba wymierna nie może być równa liczbie niewymiernej, zatem prawa strona równania musi być równa 0, a z	1

	tego wynika, że i lewa strona równania musi być równa 0: $x\sqrt{3}-y\sqrt{3}=0$, $x-y=0$, $x+2y-3=0,$ $x+2y=3.$	
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y=3 \end{cases}$.	1
	Zauważenie, że gdy $x=y$ i $x+2y=3$, to istnieje tylko jedna para liczb naturalnych $x=1, y=1$ spełniająca równanie.	1
	Określenie liczby rozwiązań równania: równanie ma jedno rozwiązanie – $x=1,\ y=1$.	1
28.	 Zauważenie, że trójkąt ADC jest równoramienny, i obliczenie jego wysokości h: $h^2=(2a)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2=4a^2-\frac{1}{4}a^2=\frac{15a^2}{4}$, $h=\frac{a\sqrt{15}}{2}$.	1
	Obliczenie pola powierzchni bocznej ostrosłupa: $P=3\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{15}}{2}=\frac{3a^2\sqrt{15}}{4}$.	1
	Zauważenie, że odcinki CE i BE, będące wysokościami trójkątów odpowiednio ACD i ADB, są równe i obliczenie długości jednego z	1

	tych odcinków: $\lvert CE \rvert = H$, $\frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot H$, $H = \frac{a\sqrt{15}}{4}$.	
	Zauważenie, że trójkąt CEB jest równoramienny, jego podstawa ma długość a, natomiast boki $\frac{a\sqrt{15}}{4}$ oraz obliczenie sinusa kąta α, stanowiącego połowę kąta między ścianami bocznymi: $\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{15}}{4}} = \frac{2\sqrt{15}}{15}$.	1
29.	Zauważenie, że odległości między miejscowościami są równe i cała trasa ma długość $3s$ km.	1
	Zastosowanie wzoru $t = \frac{s}{v}$, gdzie t – czas w godzinach v km/h – prędkość, z jaką posłaniec jedzie z C do A, s km – długość drogi z A do B, i obliczenie czasu potrzebnego na przebycie poszczególnych odcinków trasy: $t_1 = \frac{s}{40}$, $t_2 = \frac{s}{60}$, $t_3 = \frac{s}{v}$.	1
	Określenie prędkości średniej na całej trasie: $55\frac{5}{13} = \frac{3s}{t} = \frac{3s}{\frac{s}{40} + \frac{s}{80} + \frac{s}{v}}$.	1
	Przekształcenie zapisanego równania: $\frac{720}{13} = \frac{3s}{\frac{3sv + 80s}{80v}}$, $\frac{720}{13} = \frac{240sv}{3sv + 80s}$.	1
	Skrócenie prawej strony równania przez s $(s > 0)$ i obliczenie v:	1

	$720(3v+80)=3120v$, $2160v+57600=3120v$, $v=60$.	
	Podanie odpowiedzi: z miejscowości C do miejscowości A posłaniec jechał z prędkością 60 km/h.	1