Odpowiedzi i schematy oceniania

Arkusz 22

Zadania zamknięte

Numer zadania	**Poprawna odpowiedź**	**Wskazówki do rozwiązania**
1.	D.	$(\sqrt{10}-x)(ax+b)=ax\sqrt{10}+b\sqrt{10}-ax^2-xb=-ax^2+(a\sqrt{10}-b)x+b\sqrt{10}$ $-ax^2+(a\sqrt{10}-b)x+b\sqrt{10}=-\sqrt{10}x^2+10\sqrt{10}$ Wyrażenia po obu stronach równości przyjmują te same wartości liczbowe, jeżeli współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej są równe. $-a=-\sqrt{10}$ $a=\sqrt{10}$ $a\sqrt{10}-b=0$ $\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}-b=0$ $b=10$
2.	A.	Wykresem funkcji f jest parabola o ramionach skierowanych ku górze i wierzchołku w punkcie $W=(0,\sqrt{3})$. Wykresem funkcji g jest prosta $y=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Przecina ona oś OY w punkcie $P=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, leżącym poniżej punktu P. Wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g dla każdej liczby rzeczywistej x. $f(x)>g(x)$
3.	C.	$\frac{1}{a}$ – część pracy wykonanej przez Marka w ciągu jednego dnia $2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{a}=\frac{3}{2a}$ – część pracy wykonywana przez obie panie w ciągu dnia $\frac{1}{a}+\frac{3}{2a}=\frac{5}{2a}$ – część pracy wykonanej w ciągu jednego dnia przez wszystkie trzy osoby

		$\frac{1}{p}$ – część pracy do wykonania jednego dnia $\frac{1}{p}=\frac{5}{2a}$ $p=\frac{2a}{5}$
4.	C.	$k=1\cdot\log10+\frac{1}{2}\log100+\frac{1}{3}\log1000+\frac{1}{4}\log10000+\frac{1}{5}\log100000$ $k=1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot2+\frac{1}{3}\cdot3+\frac{1}{4}\cdot4+\frac{1}{5}\cdot5=1+1+1+1+1=5$
5.	D.	Każdy z wyrazów wielomianu $W(x)=x^{10}+10x^{8}+8x^{6}$ dla każdej liczby rzeczywistej przyjmuje wartość dodatnią lub 0 (parzysta potęga liczby jest nieujemna). Suma liczb nieujemnych jest liczbą nieujemną, zatem wartość liczbowa wielomianu dla każdej liczby rzeczywista jest nieujemna.
6.	B.	Po 1 cięciu otrzymaliśmy 2 kartki. Po 2 cięciu otrzymaliśmy 3 kartki. Po 3 cięciu otrzymaliśmy 4 kartki. ……………… ………………. Po $n-$tym cięciu otrzymujemy $n+1$ kartek. $n+1=100$ $n=99$
7.	D	Jeśli prosta $y=ax+b$ przecina tylko jedną oś układu współrzędnych, to $a=0$. Prosta $y=b$ jest prostopadła do osi OY. Zatem prosta doń prostopadła będzie równoległa do osi OX.
8.	A	x – cena towaru przed wprowadzeniem podatku VAT $(22-7)\%x=5{,}55$ $\frac{15}{100}x=5{,}55$ $15x=555$

		$x = 37$ (zł)
9.	C.	Długość podstawy trójkąta ABC ($\vert AB\vert$) jest równa długości podstawy trójkąta ABD. Wysokość poprowadzona do tej podstawy jest w każdym z trójkątów równa 4. Trójkąty, które mają równe podstawy i wysokości, mają równe pola.
10.	D.	$x^2 - \pi = 0$ $(x-\sqrt{\pi})(x+\sqrt{\pi}) = 0$ $x = \sqrt{\pi}$ lub $x = -\sqrt{\pi}$ Liczby $\sqrt{\pi}$ i $-\sqrt{\pi}$ to liczby niewymierne.
11.	B.	Jeżeli α jest kątem ostrym i $\sin\alpha = \cos\alpha$, to $\alpha = 45^\circ$. Trójkąt jest zatem równoramienny. a – długość ramienia trójkąta $a^2 + a^2 = 4^2$ $2a^2 = 16$ $a^2 = 8$ $a = 2\sqrt{2}$ Obwód trójkąta: $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4 = 4\sqrt{2} + 4 = 4(1+\sqrt{2})$.
12.	D.	Wzór funkcji g: $g(x) = (x-1)^3 + 7$ $g(-1) = (-1-1)^3 + 7 = -8 + 7 = -1$ $\frac{a+2}{2} = -1$ $a + 2 = -2$ $a = -4$
13.	B.	$w = \vert\sin\alpha - 1\vert = 1 - \sin\alpha$, bo $0 < \sin\alpha < 1$, gdy α jest kątem ostrym Stąd: $-1 < -\sin\alpha < 0$ $-1+1 < 1-\sin\alpha < 0+1$ $0 < 1-\sin\alpha < 1$, $0 < w < 1$.
14.	C.	$f(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$ $g(x) = (1-x)(1+x) = 1 - x^2 = -(x^2-1) = -f(x)$

		Wykresy są symetryczne względem osi OX .
15.	A.	Określamy zdarzenia: M – Maria zda egzamin z matematyki, Z – Maria zda egzamin z języka polskiego. $P(M)=0{,}3$ $P(M\cup Z)=0{,}72$ $P(M\cap Z)=0{,}18$ $P(Z)=P(M\cup Z)+P(M\cap Z)-P(M)$ $P(Z)=0{,}72+0{,}18-0{,}3=0{,}6$
16.	B.	$a=3+3^2+3^3+3^4+3^5$ Składniki sumy to wyrazy ciągu geometrycznego o ilorazie 3 i pierwszym wyrazie równym 3. Obliczamy sumę pięciu wyrazów tego ciągu. $S=\frac{1-q^5}{1-q}\cdot a_1$ $S=\frac{1-3^5}{1-3}\cdot 3=\frac{-242}{-2}\cdot 3=363$ Liczba a jest liczbą nieparzystą, więc nie może być podzielna przez liczbę parzystą. $a=363=11\cdot 33$ – liczba podzielna przez 11.
17.	D	$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n-1}{n}-\frac{n-1-1}{n-1}=\frac{n-1}{n}-\frac{n-2}{n-1}=\frac{(n-1)(n-1)-n(n-2)}{n(n-1)}=$ $\frac{n^2-2n+1-n^2+2n}{n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}$
18.	C.	Promień okręgu jest prostopadły do stycznej w punkcie styczności, zatem $\lvert\angle ABS\rvert=\lvert\angle ACS\rvert=90^\circ$. Suma kątów utworzonego czworokąta $ABSC$ jest równa 360°. Stąd: $80^\circ+90^\circ+90^\circ+\lvert\angle BSC\rvert=360^\circ$, $\lvert\angle BSC\rvert=100^\circ$.
19.	A.	Oznaczmy: A,B,C,D – wierzchołki prostokąta, który jest przekrojem

		osiowym walca, S – punkt przecięcia przekątnych, $h = \|BC\| = \|AD\|$. Trójkąt BSC jest trójkątem równoramiennym, w którym jeden z kątów ma miarę 60°. Jest to zatem trójkąt równoboczny o boku h. Zatem przekątna prostokąta jest równa $2h$. Trójkąt ADC jest trójkątem prostokątnym, w którym przeciwprostokątna jest równa $2h$, a jedna z przyprostokątnych jest równa h. $\|DC\|^2 = (2h)^2 - h^2 = 3h^2$ $\|DC\| = h\sqrt{3}$ Promień jest połową boku DC. $r = \frac{h\sqrt{3}}{2}$ Pole podstawy: $\pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{h\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi h^2}{4}$.
20.	B.	h – wysokość ostrosłupa $270 = \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot h$ $h = 10$ a – krawędź podstawy $a^2 = 81$ a=9 c – połowa przekątnej podstawy $c = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ α – kąt między wysokością a krawędzią boczną $\mathrm{tg}\alpha = \frac{c}{h} = \frac{\frac{9\sqrt{2}}{2}}{10} = \frac{9\sqrt{2}}{20}$

Zadania otwarte

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania	Liczba punktów
21.	Obliczenie, o ile wyżej metrów znalazła się kokardka po podniesieniu szlabanu: $\frac{h}{4}=\sin 60^\circ$, $h=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.	1
	Obliczenie, na jakiej wysokości nad ziemią znajduje się kokardka: $h+1=2\sqrt{3}+1\approx 3{,}5+1=4{,}5$. Kokardka znajduje się na wysokości około $4{,}5$ m nad ziemią.	1
22.	Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i obliczenie y oraz różnicy r ciągu: $-y=\frac{3+y}{2}$, $-2y=3+y$, $y=-1$, $r=3-\left[-(-1)\right]=3-1=2$.	1
	Obliczenie x: $x=-1-2=-3$.	1
23.	Zapisanie nierówności w postaci iloczynowej i rozwiązanie jej: $(x-5)(x+5)<0$, $-5<x<5$.	1
	Wypisanie liczb całkowitych należących do zbioru rozwiązań nierówności: $-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$.	1
24.	Obliczenie a_{10}: a) $a_{10}=\frac{10-2}{10+3}=\frac{8}{13}$	1
	Obliczenie n: b) $\frac{n-2}{n+3}=\frac{4}{9}$	1

	$9n-18=4n+12$ $5n=30$ $n=6$	
25.	Zauważenie, że mediana trzech liczb, to liczba środkowa: $a,4,b$ - liczby, których mediana jest równa 4.	1
	Zapisanie i przekształcenie równania, wynikającego z treści zadania: $\frac{a+4+b}{3}=5$, $a+b+4=15$, $a+b=11$.	1
26.	Przekształcenie układu równań i otrzymanie równania kwadratowego: $\begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=7 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2+1=y \\ x+x^2+1=7 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2+1=y \\ x^2+x-6=0 \end{cases}$.	1
	Obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego i określenie jego znaku: $\Delta=1+24=25>0$.	1
	Obliczenie pierwiastków równania: $x_1=\frac{-1-5}{2}=-3, x_2=\frac{-1+5}{2}=2$.	1
	Znalezienie rozwiązań i podanie ich liczby: $x=-3, y=10$ lub $x=2, y=5$. W zbiorze liczb całkowitych układ równań ma dwa rozwiązania.	1
27.	Określenie promienia półsfery: $R=6$ m, promienia walca: $r=6$ m, wysokości walca $h=(10-6)m=4$ m.	1
	Obliczenie pola powierzchni bocznej walca: $2\pi rh=2\pi\cdot 6\cdot 4=48\pi$.	1
	Obliczenie pola powierzchni półsfery: $\frac{4\pi R^2}{2}=2\pi\cdot 6^2=72\pi$.	1

	Obliczenie pola powierzchni dachu: $48\pi + 72\pi = 120\pi \approx 120 \cdot 3{,}2 = 384$ (m^2). Uwaga – określamy przybliżenie liczby π z nadmiarem (aby nie zabrakło blachy). Na pokrycie dachu potrzeba około 384 m^2 blachy.	1
28.	Określenie długości promieni okręgu opisanego i wpisanego w kwadrat w zależności od długości boku kwadratu: a – długość boku kwadratu, $r = \frac{1}{2}a$ – promień okręgu wpisanego w kwadrat, $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ – promień okręgu opisanego na kwadracie.	1
	Obliczenie pola koła wpisanego w kwadrat: $\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$	1
	Obliczenie pola koła opisanego na kwadracie. $\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2\pi}{2}$.	1
	Zapisanie równania, wynikającego z treści zadania: $\frac{a^2\pi}{2} - \frac{\pi a^2}{4} = 4\pi$.	1
	Obliczenie długości boku kwadratu: $2\pi a^2 - \pi a^2 = 16\pi$, $\pi a^2 = 16\pi$, $a^2 = 16$, $a = 4$, bo $a > 0$.	1
	Obliczenie pola kwadratu: $a^2 = 16$.	1
29.	Zauważenie, że jadąc ku końcowi karawany posłaniec przebywa drogę długości $6t$ km, o $4t$ km krótszą niż długość karawany.	1
	Zapisanie i przekształcenie odpowiedniego równania: s km – długość drogi, jaką przebywa posłaniec,	1

	t h – czas, w ciągu którego posłaniec jedzie ku końcowi karawany, T h – czas, w ciągu którego posłaniec jedzie od końca karawany ku jej przodowi, $6t = 1 - 4t$, $10t = 1$, $t = \frac{1}{10}$.	
	Zauważenie, że w drodze powrotnej posłaniec przebywa drogę długości $6T$ km , o $4T$ km dłuższą niż długość karawany.	1
	Zapisanie i przekształcenie odpowiedniego równania: $6T = 1 + 4T$, $2T = 1$, $T = \frac{1}{2}$.	1
	Obliczenie czasu, w ciągu którego posłaniec pokonuje drogę tam i z powrotem: $t + T = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{6}{10}$ (h), $\frac{6}{10}$ godziny to 36 minut.	1
	Obliczenie długości pokonywanej przez posłańca drogi: $s = \frac{6}{10} \cdot 6 = 3{,}6$ (km). Posłanie przebywa drogę długości $3{,}6$ km w ciągu 36 minut.	1