Odpowiedzi i schematy oceniania

Arkusz 23

Zadania zamknięte

Numer zadania	**Poprawna odpowiedź**	**Wskazówki do rozwiązania**
1.	B.	$W(x) = -x^{11} + x^{12} - 8 = x^{11}(x-1) - 8$ $W(-7) = (-7)^{11} \cdot (-7-1) - 8 = (-7)^{11} \cdot (-8) - 8 = (-8)\left[(-7)^{11} + 1\right]$ Iloczyn dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią, zatem $W(-7) > 0$.
2.	B.	$m = 10^{\log_{10} 2010} - 20^{\log_{20} 2011} = 2010 - 2011 = -1$ $k = \frac{1}{2}\log 100 = \log 100^{\frac{1}{2}} = \log 10 = 1$ $m = -k$
3.	C.	Okrąg $x^2 + (y-3)^2 = 3$ ma środek w punkcie $(0,3)$, a jego promień jest równy $\sqrt{3} > 1$. Liczba $\sin\alpha < 1$, gdy α jest kątem ostrym. Zatem prosta $x = \sin\alpha$ znajduje się w odległości mniejszej od środka okręgu niż długość promienia okręgu. Prosta i okrąg mają dwa punkty wspólne.
4.	D.	Kolejne liczby nieparzyste są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 2. Pierwszy z wyrazów ciągu jest równy 1, a ostatni 99. Wszystkich wyrazów jest 50. Obliczamy sumę tych wyrazów. $S = \frac{1+99}{2} \cdot 50 = 2500$
5.	C.	Dziewczynki mogą wejść do klasy na $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ sposobów, a chłopcy na $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ sposoby. Wszystkich możliwych sposobów jest więc: $120 \cdot 24 = 2880$.
6.	B.	Wyrażenie $\frac{1}{x^2 - 4x + 7}$ przyjmuje wartość największą, gdy jego

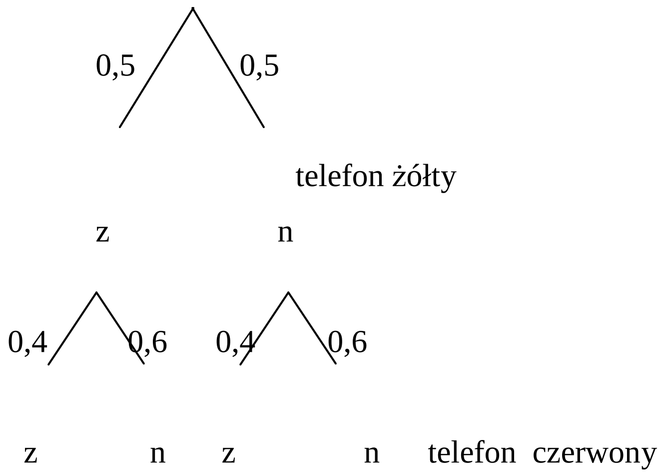
		mianownik jest najmniejszy. Wyrażenie w mianowniku jest trójmianem kwadratowym, który osiąga wartość najmniejszą w wierzchołku paraboli będącej jego wykresem. $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$
7.	D.	Dziedzina funkcji to $\langle -4,6 \rangle$. Funkcja ma trzy miejsca zerowe. $f(x) < 0$ dla $0 < x < 4$. Zbiór wartości to $\langle -4,3 \rangle$.
8	A.	$\frac{a^3 - 1}{a+1} : \frac{a^2 + a + 1}{a+1} = \frac{(a-1)(a^2 + a + 1)}{a+1} \cdot \frac{a+1}{a^2 + a + 1} = a - 1$ $a - 1 = 4$ $a = 5$ $a + 1 = 6$
9.	A.	Ułamek okresowy ma trzy liczby w okresie, na miejscu 22 stoi więc cyfra x, gdyż $22 : 3 = 7$ r 1. Podobnie na miejscu 15 stoi cyfra 2 (15:3=5r0). Zatem ułamek ma postać $1,(732) = 1\frac{732}{999} = \frac{1731}{999}$.
10.	D.	$\frac{33}{132} \cdot 100\% = 25\%$
11.	C.	Błąd bezwzględny: $\lvert 7,49 - 6 \rvert = 1,49$. Błąd względny: $\frac{1,49}{7,49} \cdot 100\% \approx 19,9\%$.
12.	C.	Proste $2x + y = 0$ i $y = 2$ przecinają się w punkcie $(-1,2)$. Proste $x + 3 = 0$ i $y = 2$ przecinają się w punkcie $(-3,2)$. Figurą, której pole należy obliczyć,jest trapez prostokątny o podstawach długości 3 i 2 i wysokości 2.

		$P=\frac{1}{2}(3+2)\cdot 2=5$
13.	B.	Funkcja kwadratowa przyjmuje tę samą wartość dla argumentów -5 i 7, zatem osią symetrii paraboli, będącej wykresem tej funkcji, jest prosta $x=\frac{-5+7}{2}=\frac{2}{2}=1$.
14.	A.	x, y – boki prostokąta $2x+2y=140$ $x+y=70$ $y=70-x$ Zapiszemy funkcję określającą zależność między polem prostokąta a długością jego boku. $P(x)=x(70-x)=-x^2+70x$ Funkcja przyjmuje wartość największą dla $x=\frac{-70}{-2}=35$. Jeśli $x=35$ m, to $y=70-35=35$ (m). Wymiary wybiegu to 35 m na 35 m.
15.	B.	Utworzone trójkąty są podobne, gdyż mają jeden kąt równy (kąt wierzchołkowy) i stosunek odpowiednich boków trójkątów jest równy: $\frac{6}{12}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, $\frac{x}{10}=\frac{1}{2}$, $2x=10$, $x=5$.
16.	B.	h – wysokość, na jakiej znajduje się latawiec $\frac{h}{12}=\sin 30^\circ$ $\frac{h}{12}=\frac{1}{2}$ $h=6$ m

17.	A.	W podanym ciągu geometrycznym $b_1 = 25, q = \frac{1}{5}$. Obliczamy wyraz b_{10}. $b_{10} = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{10-1} = 5^2 \cdot 5^{-9} = 5^{-7}$
18.	D.	Kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy. Kąt wpisany jest dwa razy mniejszy od kąta środkowego. W naszym przypadku kąt środkowy ma miarę 90°. Kąt wpisany ma miarę $90^\circ : 2 = 45^\circ$. Kąt między styczną a cięciwą jest równy kątowi wpisanemu, ma więc miarę 45°.
19.	C.	Długość przekątnej podstawy: $5\sqrt{2}$. Kąt między przekątną graniastosłupa a podstawą to kąt między przekątną graniastosłupa a przekątną podstawy. $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
20.	B.	Promień kuli, w kształcie której jest pomarańczą jest równy 6 cm. Objętość kuli: $\frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 = 288\pi$. Obliczamy, ile soku można otrzymać z pomarańczy. $80\% \cdot 288\pi \approx 0{,}8 \cdot 288 \cdot 3{,}14 = 723{,}456 \approx 723$ (cm^3)

Zadania otwarte

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania	Liczba punktów
21.	Wyznaczenie tworzącej: r – promień podstawy stożka, l – tworząca stożka, $\pi r l = 4\pi r^2$, $l = 4r$.	1

	Obliczenie wysokości stożka: $l^2 = r^2 + h^2$, $(4r)^2 = r^2 + h^2$, $h^2 = 16r^2 - r^2$, $h^2 = 15r^2$, $h = r\sqrt{15}$.	1
22.	Narysowanie drzewka i obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego do A: A – zadzwoni co najmniej jeden telefon, B – nie zadzwoni żaden z telefonów,  n – telefon nie zadzwoni, z – telefon zadzwoni, $P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3$.	1
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.	1
23.	Obliczenie długości krawędzi sześcianu: a – długość krawędzi sześcianu, $a\sqrt{3} = a + 3$, $a(\sqrt{3} - 1) = 3$, $a = \frac{3}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{2}$.	1

	Obliczenie objętości sześcianu: $a^3=\left[\frac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}\right]^3=\frac{27(3\sqrt{3}+3\cdot 3\cdot 1+3\sqrt{3}+1)}{8}=\frac{27(10+6\sqrt{3})}{8}$.	1
24.	Zapisanie wyrażenia pod pierwiastkiem w postaci kwadratu różnicy i zastosowanie wzoru $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$: $m=\sqrt{12-2\sqrt{11}}-\sqrt{11}=\sqrt{(1-\sqrt{11})^2}-\sqrt{11}=\lvert 1-\sqrt{11}\rvert-\sqrt{11}$.	1
	Wykorzystanie własności wartości bezwzględnej: $w=\lvert 1-\sqrt{11}\rvert-\sqrt{11}=-1+\sqrt{11}-\sqrt{11}=-1$, -1 – liczba wymierna.	1
25.	Zauważenie, że trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym równoramiennym i obliczenie jego pola: $P=0{,}5\cdot 20\cdot 20=200$.	1
	Obliczenie długości przeciwprostokątnej d trójkąta ABC: $d^2=20^2+20^2$, $d=20\sqrt{2}$.	1
	Zauważenie, że trójkąt ACD jest prostokątny, i obliczenie długości przyprostokątnej CD: $tg60^0=\frac{20\sqrt{2}}{\lvert CD\rvert}$, $\sqrt{3}=\frac{20\sqrt{2}}{\lvert CD\rvert}$, $\lvert CD\rvert=\frac{20\sqrt{6}}{3}$.	1
	Obliczenie pola trójkąta ACD: $P_1=\frac{1}{2}\cdot 20\sqrt{2}\cdot\frac{20\sqrt{6}}{3}=\frac{200\sqrt{12}}{3}=\frac{400\sqrt{3}}{3}$.	1
	Obliczenie pola powierzchni całej działki: $200+\frac{400\sqrt{3}}{3}\approx 200+231=431$ (m^2). Pole powierzchni działki pani Marzeny jest równe około $431\ \mathrm{m}^2$.	1

26.	Zapisanie układu równań wynikającego z treści zadania: $\begin{cases} a+b=-4 \\ a-b=8 \end{cases}$.	1
	Rozwiązanie układu równań: $+\begin{cases} a+b=-4 \\ a-b=8 \end{cases}$, $2a=4$, $a=2$, $2-b=8$, $b=-6$.	1
	Zapisanie wzoru funkcji $f(x)=2x^2-6x$.	1
	Znalezienie miejsc zerowych funkcji: $f(x)=2x(x-3)$, miejsca zerowe: $0,3$.	1
	Określenie rozwiązania nierówności: $f(x)>0$ dla $x\in(-\infty,0)\cup(3,\infty)$.	1
27.	Ustalenie kolejnych cen sukienki: x – liczba procent, o które obniżano cenę sukienki, $100-x\%100$ – cena sukienki po pierwszej obniżce, $(100-x\%100)-x\%(100-x\%100)$ – cena sukienki po drugiej obniżce.	1
	Zapisanie odpowiedniego równania i zamiana procentów na ułamki: $(100-x\%100)-x\%(100-x\%100)=96{,}04$, $100-\frac{x}{100}\cdot 100-\frac{x}{100}(100-\frac{x}{100}\cdot 100)=96{,}04$, $100-x-\frac{x}{100}(100-x)=96{,}04$.	1
	Sprowadzenie równania do równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$: $100-x-x+\frac{x^2}{100}=96{,}04$, $10000-200x+x^2=9604$, $x^2-200x+396=0$.	1

	Obliczenie wyróżnika trójmianu i określenie jego znaku: $\Delta = 200^2 - 4 \cdot 396 = 38416 > 0$.	1
	Obliczenie pierwiastków: $x_1 = \frac{200-196}{2} = 2, x_2 = \frac{200+196}{2} = 198$. Liczba 198 nie spełnia warunków zadania.	1
	Podanie odpowiedzi: Cenę sukienki obniżano dwukrotnie o 2%.	1
28.	Zauważenie, że liczby rozwiązywanych codziennie zadań tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 5 i pierwszym wyrazie 10. Suma n początkowych wyrazów tego ciągu ma być równa $3000 - 200 = 2800$, n – liczba dni, w ciągu których Aleksander będzie rozwiązywał zadania.	1
	Zapisanie równania, wynikającego z treści zadania – właściwe zastosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: $\frac{10+10+5(n-1)}{2} \cdot n = 2800$.	1
	Przekształcenie równania: $(20+5n-5)n = 5600,$ $5n^2 + 15n - 5600 = 0,$ $n^2 + 3n - 1120 = 0.$	1
	Rozłożenie równania na czynniki: $n^2 + 35n - 32n - 32 \cdot 35 = 0,$ $n(n+35) - 32(n+35) = 0,$ $(n-32)(n+35) = 0.$	1
	Określenie pierwiastków: $-35, 32.$ Liczba (-35) nie spełnia warunków zadania. Dzisiaj Aleksander rozwiązał 10 zadań, więc na rozwiązanie pozostałych potrzebuje $32 - 1 = 31$ dni.	1
	Podanie odpowiedzi: Rozwiązanie pozostałych zadań zajmie Aleksandrowi jeszcze 31 dni.	1